

## CONTROLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES DISCRETES

### Exercice 1 : Principe et raisonnement mathématique 5.75 pts

- 1) Montrer par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. 1pt
- 2) Donner la contraposée, puis la réciproque de la proposition : « n est un carré parfait alors  $2n$  n'est pas un carré parfait. » 0.5\*2=1 pt
- 3) En supposant que la proposition initiale soit vraie, quelle est la valeur de vérité de sa contraposée ? De sa négation ? 0.25\*2=0.5 pt
- 3) Montrer par récurrence simple que « pour tout n naturel, si n est pair alors n+1 est impair » 1pt
- 4) En quoi consiste le raisonnement direct pour montrer que  $P \Rightarrow Q$ , P et Q étant des propositions quelconques. 0.25pt
- 5) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Nier les assertions suivantes : (0.5\*4 pts= 2 pts)  
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$   
 $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > 0$   
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$   
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{Z}, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$

### Exercice 2 : Relations binaires 7.75 pts

- 1) Définition : 0.25\*3=0.75 pts  
Qu'est-ce qu'une relation binaire ?  
Qu'est-ce qu'une relation d'ordre ?  
Qu'est-ce qu'une relation d'équivalence ?
- 1) i) Dire et montrer (si oui) si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives : 1\*4=4pts

1.  $E = \mathbb{Z}$  et  $xRy \Leftrightarrow x = -y$ ;
2.  $E = \mathbb{R}$  et  $xRy \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2y = 1$
3.  $E = \mathbb{N}$  et  $xRy \Leftrightarrow \exists p, q \geq 1, y = p \times q$  (p et q sont des entiers).

ii) D'après vos réponses précédentes, quelles sont parmi elles les relations d'ordre et les relations d'équivalence ? 0.5\*3= 1.5 pts

iii) Dans le cas où vous avez une relation d'équivalence, déterminer la classe d'équivalence correspondante pour un élément x de E. Pour la relation qui sont d'ordre, déterminer si elle est d'ordre partiel ou d'ordre total. 3\*0.5= 1.5 pts

### Exercice 3 : Ensembles 5.75pts

- 1) Soit  $A = ]1, 3[$ .
  - i) Déterminer  $\sup A$ . 0.5pt
  - ii) Pensez-vous que 1 soit un minorant de A ? A admet-il un minimum ? 0.5\*2= 1 pt
- 2) Soit  $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ , un ensemble.  
Déterminer  $\inf B$  et  $\max B$ , s'ils existent. 0.5\*0.2=1 pt
- 3) Soit E, F deux ensembles et  $f: E \rightarrow F$ .  
Soit  $A \subset E$  et  $B \subset F$ .
  - i) Démontrer que  $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ . 1.5pt
  - ii) Quand dit-on qu'une application est injective ? surjective ? bijective ? 0.25\*3=0.75 pt
  - iii) D'après le cours, est-ce que si  $A \subset B$ ,  $\sup A \leq \sup B$  ? Est-ce  $\sup(-A) = -\inf(A)$  ? 0.25\*2=0.5pt (La preuve n'est pas demandée, juste la réponse. Répondez par oui ou non)
  - iv) Quelle est la méthode mathématique la plus utilisée pour montrer que  $A=B$  ? Comment avons-nous appris à le montrer de façon la plus évidente ? (2 étapes) 0.5pt

Présentation 0.75 pt